Зимно математическо състезание

Сливен, 20-22 януари 2017 г.

Задача 8.1. Да се докаже, че за произволни реални числа x, y и z е изпълнено неравенството:

$$x^2y^2z^2 + x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + z^2 + 2 \geq 2(xy + xz + yz)$$

Кога се достига равенство?

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно на:

$$(z^2 + 1)(xy - 1)^2 + (xz + yz - 1)^2 \geq 0$$

и следователно е изпълнено за произволни реални числа x, y и z. Равенство се достига тогава и само тогава, когато $xy = 1$ и $xz + yz - 1 = 0$. От тези равенства получаваме $y = \dfrac{1}{x}$ и $z = \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{x}{x^2+1}$. Следователно равенство се достига тогава и само тогава, когато $x = p \neq 0$, $y = \dfrac{1}{p}$ и $z = \dfrac{p}{p^2+1}$.

Забележка. Задачата може да се реши и като запишем неравенството във вида

$$f(x) = (x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1)z^2 - 2(x + y)z + x^2y^2 - 2xy + 2 \geq 0$$

и докажем, че за дискриминантата D на съответното квадратно уравнение е изпълнено $D \leq 0$.

Критерии за оценяване: 4 т. за доказване на неравенството; 2 т. за намиране на условията за равенство.

Задача 8.2. Върху страните BC, CA и AB на $\triangle ABC$, външно за триъгълника, са построени квадрати съответно с центрове M, N и P. Симетралите на отсечките NP, PM и MN пресичат страните BC, CA и AB съответно във вътрешни точки A_1, B_1 и C_1.

а) Да се намери отношението на лицата на триъгълниците $A_1B_1C_1$ и ABC.

б) Да се намерят ъглите $\sphericalangle NA_1P$, $\sphericalangle PB_1M$ и $\sphericalangle MC_1N$.

Решение. а) Нека A_2, B_2 и C_2 са средите съответно на BC, CA и AB. Разглеждаме триъгълниците C_2B_2N и MA_2C_2. Отсечката B_2C_2 е средна отсечка в $\triangle ABC$. Затова са изпълнени $B_2C_2 = \dfrac{BC}{2}$ и $B_2C_2 \parallel BC$. От второто свойство на средната отсечка B_2C_2 следва, че $\sphericalangle NB_2C_2 = 90^\circ + \sphericalangle ACB$. Отсечката NB_2 е медиана в правоъгълния триъгълник ACN и затова $NB_2 = \frac{CA}{2}$. Аналогично за $\triangle MA_2C_2$ имаме $C_2A_2 = \frac{CA}{2}$, $C_2A_2 \parallel CA$, $\sphericalangle MA_2C_2 = 90^\circ + \sphericalangle ACB$ и $MA_2 = \dfrac{BC}{2}$. От забелязаните равенства следва, че са изпълнени: $B_2C_2 = MA_2$, $NB_2 = C_2A_2$ и $\sphericalangle NB_2C_2 = \sphericalangle MA_2C_2 = 90^\circ + \sphericalangle ACB$. Следователно $\triangle C_2B_2N \cong \triangle MA_2C_2$ по първи признак. Оттук имаме $C_2N = C_2M$. Следователно C_2 лежи върху симетралата на MN.

Тъй като симетралата на MN може да има само една обща точка с AB, то $C_2 \equiv C_1$. Аналогично се получава, че $A_2 \equiv A_1$ и $B_2 \equiv B_1$. Така получихме, че точките A_1, B_1 и C_1 са средите съответно на страните BC, CA и AB. Оттук и доказаното по-горе имаме, че $\triangle C_1B_1N \cong \triangle MA_1C_1$. Тъй като лицата на триъгълниците AB_1C_1, BC_1A_1 и CA_1B_1 са равни на $\dfrac{1}{4}$ от лицето на $\triangle ABC$, то и лицето на $\triangle A_1B_1C_1$ е $\dfrac{1}{4}$ от лицето на $\triangle ABC$. Следователно търсеното отношение е равно на $\dfrac{1}{4}$.

б) От еднаквостта на триъгълниците C_1B_1N и MA_1C_1 следва, че $\sphericalangle NC_1B_1 = \sphericalangle A_1MC_1$. Като приложим това равенство получаваме

$$\begin{aligned}
\sphericalangle MC_1N &= \sphericalangle MC_1A_1 + \sphericalangle A_1C_1B_1 + \sphericalangle NC_1B_1 = \sphericalangle MC_1A_1 + \sphericalangle A_1C_1B_1 + \sphericalangle A_1MC_1 = \\
&= (\sphericalangle MC_1A_1 + \sphericalangle A_1MC_1) + \sphericalangle A_1C_1B_1 = 180^\circ - \sphericalangle MA_1C_1 + \sphericalangle A_1C_1B_1 = \\
&= 180^\circ - (90^\circ + \sphericalangle ACB) + \sphericalangle ACB = 90^\circ.
\end{aligned}$$

Следователно $\sphericalangle MC_1N = 90^\circ$. Аналогично се получава, че $NA_1P = 90^\circ$ и $PB_1M = 90^\circ$.

Критерии за оценяване: 3 т. за а) и 3 т. за б).

Задача 8.3. Да се намерят всички естествени числа n, за които числото $2^{n+2} + 3^{n+2} + 5^{n+2}$ се дели на $2^n + 3^n + 5^n$.

Решение. Въвеждаме означенията $A = 2^n+3^n+5^n$ и $B = 2^{n+2}+3^{n+2}+5^{n+2}$. Разглеждаме следните случаи:

1) При $n = 1$ имаме $A = 10$ и $B = 160$. Следователно B се дели на A.

2) При $n = 2$ имаме $A = 38$ и $B = 722 = 38.19$. Следователно B се дели на A.

3) Нека $n \geq 3$. Тъй като $2^n + 3^n + 5^n = (-1)^n + 0 + (-1)^n = 2(-1)^n \pmod 3$, то A не се дели на 3. Да допуснем, че B се дели на A. Тогава A е делител на $B - A = 3C$, където $C = 2^n + 8.3^{n-1} + 8.5^n$. Тъй като A не се дели на 3, оттук следва, че C се дели на A. От друга страна при $n \geq 3$ имаме

$$C = 8.3^{n-1} + 9.5^n - (5^n - 2^n) = 2[(8.3^{n-2} + 3.5^n) - (5^{n-1} + 2.5^{n-2} + \cdots + 2^{n-2}.5 + 2^{n-1})].$$

Следователно C се дели на 3. Оттук следва, че $\frac{1}{3}C$ се дели на A. Затова съществува естествено число k, при което е изпълнено равенството $C = 3kA$. Ако $k \geq 3$, то

$$C = 3kA \geq 9A = 9.2^n + 9.3^n + 9.5^n > 2^n + 8.3^{n-1} + 8.5^n = C.$$

Следователно $k = 1$ или $k = 2$. Ако $k = 1$, то $C - 3kA = C - 3A = 5^{n+1} - 3^{n-1} - 2^{n+1} = 0$. Последното равенство е невъзможно, защото

$$5^{n+1} - 3^{n-1} - 2^{n+1} = 3.5^n + 2.5^n - 3^{n-1} - 2^{n-1} > (3.3^n = 3^n) + (2.5^n - 2.2^n) > 0.$$

Ако $k = 2$, то $C - 3kA = C - 6A = 10(5^{n-1} - 3^{n-1} - 2^{n-1}) = 0$. Това равенство също е невъзможно, защото

$$5^{n-1} - 3^{n-1} - 2^{n-1} = (5 - 3)(5^{n-2} + \cdots + 3^{n-2}) - 2^{n-1} > 2.5^{n-2} - 2.2^{n-2} > 0 \text{ (при } n \geq 3).$$

Следователно търсените стойности на n са $n = 1$ и $n = 2$.

Критерии за оценяване: 1 т. за намиране на двете решения; 6 т. за доказване, че при $n \geq 3$ няма решение (2 точки за получаване на оценки, които намаляват делимото; 4 точки за ефективното ими използване – по 2 т. за всеки от случаите $k = 1$ и $k = 2$ в горното решение).

Задача 8.4. Дадени са 2017 външно еднакви тежести с тегла 1 грам, 2 грама, ..., 2016 грама и 2017 грама (не знаем коя тежест колко тежи) и естествено число n.

Разполагаме с двураменна везна, която може да сравнява теглата на произволни две от тежестите. При това, ако разликата в теглата на двете тежести не надминава n, везната остава в равновесие. Ако разликата в теглата на двете тежести е по-голяма от n, везната показва коя тежест е по-тежка и колко е разликата в теглата на двете тежести.

а) Да се докаже, че при $n = 1$ с 2017 претегляния на везната можем да намерим теглата на всяка от тежестите.

б) Да се намерят всички стойности на n, за които с претегляния с везната могат да се намерят теглата на всяка от тежестите.

Решение. Да означим тежестите с $A_1, A_2, \dots, A_{2017}$.

а) Да претеглим A_1 с всяка от останалите 2016 тежести. Да отбележим, че от всички 2016 претегляния везната ще бъде в равновесие в едно или две претегляния.

1. Ако има само една тежест (нека това е A_i), за която везната е в равновесие. Това означава, че теглото на A_1 е 1 (ако тя е по-лека от всички останали без A_i) или 2017 грама (ако тя е по-тежка от всички останали без A_i) и теглото на A_i е съответно 2 или 2016. Теглото на всяка от останалите тежести се определя еднозначно от претеглянето и с A_1. В този случай 2016 претегляния са достатъчни.

2. Ако има две тежести (нека това са A_i и A_j), за които везната е в равновесие.

- Ако A_1 е по-тежка от всички останали тежести, то A_1 има тегло 2016 грама, а теглата на A_i и A_j са 2015 и 2017. Теглото на всяка от останалите тежести се определя еднозначно от претеглянето и с A_1. С едно претегляне на A_i и A_j ще определим коя от тях колко тежи.
- Ако A_1 е по-лека от всички останали тежести, то A_1 има тегло 2 грама, а теглата на A_i и A_j са 1 и 3. Теглото на всяка от останалите тежести се определя еднозначно от претеглянето и с A_1. С едно претегляне на A_i и A_j ще определим коя от тях колко тежи.
- Нека изберем тежест A_p която е по-тежка от A_1 и има най-голяма разлика с теглото на A_1 и тежест A_q, която е по-лека от A_1 и има най-голяма разлика с теглото на A_1. Ясно е, че теглото на A_p е 2017, а теглото на A_q е 1. Тогава от претеглянето на A_1 с A_p (или на A_1 с A_q) определяме теглото на A_1 (нека това тегло е t). От тук следва, че теглата на всички тежести (без A_i и A_j) се определят еднозначно от претеглянето и с A_1. Теглата на A_i и A_j са $t-1$ и $t+1$ и с едно претегляне на тези две тежести можем да определим теглата им.

б) Ако $n \geq 1009$ везната ще бъде в равновесие при всяко претегляне, в което участва тежест с тегло 1008, 1009 или 1010 грама (защото разликата в теглата на произволна тежест и тежест с тегло 1008, 1009 или 1010 не надминава 1009 грама). Това означава, че тежестите с тегла 1008, 1009 и 1010 грама са „неразличими“ при поставяне на везната, т.е. няма как да ги намерим. Ако $n \leq 1008$ да премерим всички двойки тежести. Двойката, за която разликата в теглата е 2016 ще ни определи тежестите от 2017 грама (нека това е тежест A) и 1 грам (нека това е тежест B). Сега всички тежести с тегла от 2 грама до 1008 грама ще се определят от претеглянето с A, а всички тежести от 1010 до 2016 грама ще се определят от претеглянето с B.

Критерии за оценяване: 3 т. (2 т. за описание на вярна стратегия и 1 т. за доказателство) за а); 4 т. (2 т. за верен отговор и 2 т. за доказването му) за б).

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$x^2 - (2018^2 - 1 + a)x + (2018 - a)2018^2 = 0$$

има реални корени x_1 и x_2, удовлетворяващи равенството

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2017}.$$

Решение. Да положим за прегледност $2017 = p$. Даденото условие е еквивалентно на

$$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{p} \iff \frac{(p+1)^2 - 1 + a}{(p+1)^2(p+1-a)} = \frac{1}{p} \iff p(p+1)^2 + p(a-1) = p(p+1)^2 + (1-a)(p+1)^2.$$

От последното равенство получаваме $a = 1$ или $p = -(p+1)^2$, като второто очевидно е невъзможно. При $a = 1$ корените на даденото уравнение са $p+1$ и $p(p+1)$.

Критерии за оценяване: (6 точки) 1 т. за заместване чрез формулите на Виет, 2 т. за достигане до линейно уравнение за a, 1 т. за намиране на корена $a = 1$, 1 т. за отхвърляне на $a \neq 1$, 1 т. за отбелязване, че при $a = 1$ корените са реални.

Задача 9.2. Точките A_1, B_1 и N са вътрешни съответно за страните BC, CA и AB на остроъгълен $\triangle ABC$, като A_1CB_1N е успоредник, а четириъгълникът ABA_1B_1 е вписан. Описаната около $\triangle A_1B_1C$ окръжност пресича CN в точка M. Да се докаже, че правата A_1B_1 е обща допирателна за окръжностите, описани около триъгълниците AMN и BMN.

Решение. Ще използваме стандартните означения за ъглите на $\triangle ABC$. Да означим още $\sphericalangle ACN = \varphi$ и $\sphericalangle BCN = \psi$. Тогава от условието следва, че $\sphericalangle MA_1B_1 = \varphi$ и $\sphericalangle MB_1A_1 = \psi$, както и $\sphericalangle MNA_1 = \varphi$ и $\sphericalangle MNB_1 = \psi$.

Имаме $\sphericalangle ANC = \beta + \psi$ като външен за $\triangle BCN$. Освен това $\sphericalangle B_1A_1C = \alpha$ от вписания четириъгълник ABA_1B_1 и тогава

$$\sphericalangle MA_1B = 180^\circ - (\sphericalangle MA_1B_1 + \sphericalangle B_1A_1C) = 180^\circ - (\alpha + \varphi) = \beta + \gamma - \varphi = \beta + \psi = \sphericalangle ANC.$$

Следователно четириъгълникът NBA_1M е вписан. Оттук и от $\sphericalangle MNA_1 = \sphericalangle MA_1B_1 = \varphi$ следва, че правата A_1B_1 е допирателна към окръжността, описана около $\triangle BMN$.

Аналогично се доказва, че четириъгълникът NB_1A е вписан и A_1B_1 е допирателна към окръжността, описана около $\triangle AMN$.

Критерии за оценяване:(6 точки) 1 т. за четирите ъгъла $\sphericalangle MA_1B_1 = \varphi$, $\sphericalangle MB_1A_1 = \psi$, $\sphericalangle MNA_1 = \varphi$ и $\sphericalangle MNB_1 = \psi$, 1 т. за $\sphericalangle ANC = \beta + \psi$, 2 т. за доказване, че NBA_1M е вписан, 1 т. за доказване, че A_1B_1 е допирателна към окръжността, описана около $\triangle BMN$, 1 т. за отбелязване на аналогията с другата окръжност (тази точка се дава само ако е приключена другата част).

Задача 9.3. Да се намерят всички естествени числа n, за които

$$(n-2)\left[\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2}\right]$$

дели 3^{2017}.

Решение. От условието следва, че $n \geq 3$ и $(n-2)(2n^2+1) = 3^m$ за някое естествено число $m \leq 2017$. Следователно $n - 2 = 3^k$ и $2n^2 + 1 = 3^\ell$, където $k + \ell = m$, k и ℓ са цели неотрицателни числа. Да отбележим, че $k = 0$ и 1 не дават решение. От получената система изключваме n и достигаме до

$$9 + 2.3^{2k} + 8.3^k = 3^\ell.$$

Тъй като $\ell > 2k > k \geq 2$, от горното равенство следва, че всъщност $k = 2$ (в противен случай ще имаме противоречие по модул 27). Тогава $n = 3^k + 2 = 11$ и това е единственото решение на задачата.

Критерии за оценяване: (7 точки) 1 т. за уравнението $(n-2)(2n^2+1) = 3^m$, 1 т. за системата $n - 2 = 3^k$ и $2n^2 + 1 = 3^\ell$, 2 т. за изключване на n, 2 т. за достигане до извода, че $k = 2$, 1 т. за довършване.

Задача 9.4. За целите неотрицателни числа

$$\begin{aligned} a &= a_{n-1}2^{n-1} + a_{n-2}2^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot 2 + a_0, \\ b &= b_{n-1}2^{n-1} + b_{n-2}2^{n-2} + \cdots + b_1 \cdot 2 + b_0, \end{aligned}$$

$a_i, b_i \in \{0, 1\}$, дефинираме

$$a \oplus b = c = c_{n-1}2^{n-1} + c_{n-2}2^{n-2} + \cdots + c_1 \cdot 2 + c_0,$$

където

$$c_i = \begin{cases} 0 & \text{ако } a_i = b_i, \\ 1 & \text{ако } a_i \neq b_i. \end{cases}$$

Дадени са три цели числа $0 \leq u, v, w \leq 2^n - 1$, за които е изпълнено

$$u < v \oplus w, \quad v < u \oplus w.$$

Да се докаже, че

$$u \oplus v < w.$$

Решение. Нека идентифицираме числата

$$u = u_{n-1}2^{n-1} + u_{n-2}2^{n-2} + \ldots + u_0, v = v_{n-1}2^{n-1} + v_{n-2}2^{n-2} + \ldots + v_0, w = w_{n-1}2^{n-1} + w_{n-2}2^{n-2} + \ldots + w_0$$

с двоичните низове

$$\overline{u} = u_{n-1}u_{n-2}\ldots u_0,\ \overline{v} = v_{n-1}v_{n-2}\ldots v_0, \overline{u} = w_{n-1}w_{n-2}\ldots w_0.$$

По условие имаме

$$\begin{aligned} \overline{u} &= \alpha 0 \ldots, \quad \overline{v \oplus w} = \alpha 1 \ldots, \\ \overline{v} &= \beta 0 \ldots, \quad \overline{u \oplus w} = \beta 1 \ldots, \end{aligned}$$

където α е дума с дължина i, а β е дума с дължина j.

Да допуснем, че $i \neq j$. Без ограничение на общността нека $i < j$. Да положим $\beta = \beta' x \dots y$, където β' е дума с дължина $i-1$. Сега имаме

$$\begin{aligned} \overline{w} &= \overline{u} \oplus (\overline{u} \oplus \overline{w}) = (\alpha \oplus \beta')x \oplus 0 \dots \\ \overline{w} &= \overline{v} \oplus (\overline{v} \oplus \overline{w}) = (\alpha \oplus \beta')x \oplus 1 \dots \end{aligned}$$

противоречие, тъй като i-тият символ във $\overline{w}$ не може да е едновременно x и $x \oplus 1$. Следователно $i = j$.

Сега имаме

$$\overline{u} \oplus \overline{v} = (\alpha \oplus \beta)0 \dots, \overline{w} = \overline{u} \oplus (\overline{u} \oplus \overline{w}) = (\alpha \oplus \beta)1 \dots.$$

откъдето $u \oplus v < w$, което трябваше да се докаже.

Критерии за оценяване: 1 т. за преформулиране на неравенствата от условието на езика на двоичните редици, 4 т. за отхвърляне на възможността $i \neq j$, 2 т. за довършване.

Задача 10.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които неравенството

$$a^2x^4 - (4a-1)x^2 + 7 < 0$$

има решение.

Решение. Очевидно при $a = 0$ неравенството няма решение.

Нека $a \neq 0$. Да разгледаме функцията

$$f(t) = a^2t^2 - (4a-1)t + 7, \quad t \geq 0.$$

Задчата се свежда до това да определим, за кои стойности на a неравенството $f(t) < 0$ има неотрицателно решение, или, еквивалентно, за кои стойности на a минималната стойност на $f(t)$ в интервала $[0, +\infty)$ е отрицателна.

Минимумът на $f(t)$ се достига за $t_0 = \dfrac{4a-1}{2a^2}$. Ако $t_0 \leq 0$, то за $t \geq 0$ функцията е растяща и $f(t) \geq f(0) = 7 > 0$. Следователно $t_0 > 0$, т.е. $a > \frac{1}{4}$.

Сега

$$f(t_0) = \min f(t) = a^2 \left(\frac{4a-1}{2a^2}\right)^2 - (4a-1)\frac{4a-1}{2a^2} + 7 = -\frac{(4a-1)^2}{4a^2} + 7 < 0.$$

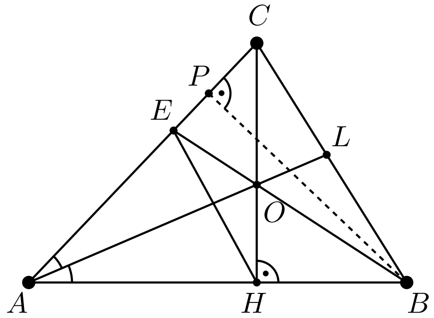
Последното неравенство води до $12a^2 + 8a - 1 < 0$, чиито решения са $a \in (-2-\sqrt{7})/6, (-2+\sqrt{7})/6)$. Тъй като $1/4 > (-2+\sqrt{7})/6$, такива a не съществуват.

Критерии за оценяване: 1 т. за случая $a = 0$, 1 т. за преминаване към изследване на квадратна функция (включително преформулировка на задачата), 1 т. за $t_0 \leq 0$, 2 т. за получаване на неравенството $12a^2 + 8a - 1 < 0$, 1 т. за заключението.

Задача 10.2 Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ с височина CH ($H \in AB$) и ъглополовяща AL ($L \in BC$), които се пресичат в точка O. Правата BO пресича страната AC в точка E. Да се докаже, че $\sphericalangle AHE > 45^\circ$.

Решение. Първо да забележим, че исканото неравенство $\sphericalangle AHE > 45^\circ$ е еквивалентно с $\dfrac{AE}{EC} > \dfrac{AH}{HC}$. От теоремата на Чева за $\triangle ABC$ и правите AL, BE и CH получаваме

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CL}{LB} \cdot \frac{BH}{HA} = 1 \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{BL}{LC} \cdot \frac{AH}{HB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AH}{HB}.$$



Нека BP е височината от върха B. Имаме

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CH} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AH}{HC} \cdot \frac{BP}{BH}.$$

Остава да съобразим, че $BP > BH$ като хорди в окръжността с диаметър BC, съответстващи на $\sphericalangle BCP > \sphericalangle BCH$.

Критерии за оценяване: 1 т. за свеждане на задачата до $AE/EC > AH/HC$; 2 т. за прилагане теоремата на Чева и използване на факта, че $BL/LC = AB/AC$; 3 т. за довършване на доказателството.

Задача 10.3. Да се реши в естествени числа уравнението $2^n + n = m!$.

Решение. Очевидно $n = 1$ не е решение. Освен това $m > 1$ и тогава $m!$ се дели на 2. Понеже 2^n е четно, то n е четно. Ако n е просто, то $n = 2$ и $m = 3$. Ако $n > 2$, то n е съставно. Нека $n = 2^w s$, където $w, s \in \mathbb{N}$ и $(s, 2) = 1$. Получаваме, че w е каноничната степен на 2 в разлагането на $m!$.

Да допуснем, че $s > 1$. Тогава нека p е най-малкият прост делител на s. Ясно е, че ако $p \leq m$, то $m!$ се дели на p и понеже $n = 2^w s$ се дели на p, то и 2^n се дели на p, което е невъзможно. Следователно $p > m$, откъдето $s > m$.

Да допуснем, че $2^w \leq m$. Тогава 2^w ще бъде единствената степен на двойката като множител в $m!$, защото $2^w || m!$. Така получаваме единствена възможност - $w = 1$ и $m = 2$, което не води до решение. Противоречие. Следователно $2^w > m$.

Сега използваме резултатите $s > m$ и $2^w > m$ и след почленно умножение на неравенствата достигаме до $2^w s > m^2$ или $n > m^2$. Тогава $2^n + n > 2^{m^2} + m^2 > 2^{m^2}$. Но $2^m > m$ за всяко $m \in \mathbb{N}$. Умножаваме неравенствата $2^m > m, 2^m > m-1, \cdots, 2^m > 1$ и извеждаме $2^{m.m} > m!$, което е равносилно на $2^{m^2} > m!$ и така изкарваме $2^n + n > m!$, което е невъзможно. Следователно $s > 1$ не води до решение.

Сега знаем, че $n = 2^w$ за $w \in \mathbb{N}$ и $2^n + n = m!$. Понеже $n > 2$(n е съставно), то $m \geq 3$ и така $2^n + n$ се дели на 3, но понеже n е четно, то $2^n \equiv 1 \pmod 3$ и оттук извеждаме $n \equiv 2 \pmod 3$. Тогава $2^n \equiv 2^2 \pmod 7$ и така $n \equiv 3 \pmod 7$. Но нека вземем предвид факта, че $n = 2^w$. Така $2^w \equiv 3 \pmod 7$, което е невъзможно, защото степените на 2 дават остатъци 1, 2 и 4 при деление на 7 , а 3 не е от тях. Следователно за съставно n решение няма.
Така единственото решение на задачата е $(n; m) = (2; 3)$.

Критерии за оценяване: 1 т. за равенството на степение на 2 в n и $2^n + n$, 1 т. за $s > m$, 1 т. за $2^w > m$, 2 т. за $s = 1$, 2 т. за довършване.

Задача 10.4. Дадено е естествено число n. Да се намери най-малката възможна стойност на естественото число k, за което съществува полином $f(x)$ с цели коефициенти, който има цял корен, а полиномът $f(x) + k$ има n различни цели корена.

Решение. Отговор: $(m!)^2$ при четно $n = 2m$ и $(m+1)(m!)^2$ при нечетно $n = 2m+1$.

Нека първо $n = 2m$ е четно число. От условието следва, че

$$g(x) = f(x) + k = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{2m})h(x),$$

където $x_1, x_2, \ldots, x_{2m}$ са различни цели числа, а $h(x)$ е полином с цели коефициенти.

Ако $f(x)$ има цял корен x_0, от горното равенство следва, че $k = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_{2m})h(x_0)$, откъдето $k = |x_0 - x_1||x_0 - x_2| \ldots |x_0 - x_{2m}||h(x_0)|$. Множителите отдясно са естествени числа и измежду $|x_0 - x_1|, |x_0 - x_2|, \ldots, |x_0 - x_{2m}|$ никое естествено число не може да се появява повече от два пъти. Следователно

$$k \geq |x_0 - x_1||x_0 - x_2| \ldots |x_0 - x_{2m}| \geq 1.1.2.2. \cdots .m.m = (m!)^2.$$

Нека $k = (m!)^2$ и $f(x) = (-1)^m(x^2 - 1)(x^2 - 4) \ldots (x^2 - m^2) - (m!)^2$. Лесно се вижда, че $f(0) = 0$ и $f(x) + k$ има корени $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m$.

При нечетно $n = 2m + 1$ разсъждаваме по аналогичен начин, като в този случай оценката е $k \geq (m+1)(m!)^2$, а полином с исканите свойства е $f(x) = (-1)^{m+1}(x^2 - 1)(x^2 - 4) \ldots (x^2 - m^2)(x - m - 1) - (m+1)(m!)^2$.

Критерии за оценяване: (7 точки) 1 т. за представянето $k = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_{2m})h(x_0)$, 1 т. за $k = |x_0 - x_1||x_0 - x_2| \ldots |x_0 - x_{2m}||h(x_0)|$, 1 т. за извода, че в $|x_0 - x_1|, |x_0 - x_2|, \ldots, |x_0 - x_{2m}|$ едно естествено число може да се среща най-много два пъти, 2 т. за оценката $k \geq (m!)^2$, 1 т. за конструкция, 1 т. за описание на нечетния случай.

Задача 11.1 Дадена е геометрична прогресия $b_1 \neq 0, b_2, \ldots, b_n$, с дължина $n \geq 3$ и частно $q > 1$, което е естествено число. Аритметична прогресия има първи член, равен на първия член на геометричната прогресия и последен член, равен на предпоследния член на геометричната прогресия. Ако сборът от членовете на геометричната прогресия е равен на сбора от членовете на аритметичната прогресия, да се намери n.

Решение. От условието следва, че ако аритметичната прогресия има дължина k, то $a_1 = b_1$ и $a_k = b_{n-1} = b_1 q^{n-2}$. Сборът от членовете на геометричната прогресия е равен на $b_1(1+q+\cdots+q^{n-1})$, а сборът от членовете на аритметичната прогресия е $\frac{a_1+a_k}{2}.k = \frac{b_1+b_1q^{n-2}}{2}.k$. От равенството на тези два израза получаваме:

$$k = \frac{2(1+q+\cdots+q^{n-1})}{1+q^{n-2}}.$$

При $n=3$ получаваме, че числото $\frac{2(1+q+q^3)}{1+q} = 2 + \frac{2q^3}{1+q}$ не е цяло.

При $n=4$ получаваме $k = 2(q+1)$.

При $n \geq 5$ числото $\frac{2(1+q+\cdots+q^{n-1})}{1+q^{n-2}} = 2(q+1) + \frac{2(q^2+\cdots+q^{n-3})}{1+q^{n-2}}$ не е цяло.

Следователно $n=4$.

Критерии за оценяване: 2 т. за получаване на равенството $k = \frac{2(1+q+\cdots+q^{n-1})}{1+q^{n-2}}$; по 1 т. за случаите $n=3$ и $n=4$; 2 т. за случая $n \geq 5$.

Задача 11.2 В $\triangle ABC$ точките M и N са съответно от страните BC и AC. Отсечките AM и BN се пресичат в точка P. Описаните окръжности около $\triangle ANP$ и $\triangle BMP$ се пресичат за втори път в центъра на вписаната окръжност за $\triangle ABC$. Да се намери IP, ако $\sphericalangle ACB = 45^\circ$ и $R_{ABC} = 1$.

Решение. Имаме

$$\sphericalangle ANI = \sphericalangle API = 180^\circ - \sphericalangle MPI = \sphericalangle MBI = \frac{1}{2}\beta,$$

откъдето следва, че $\triangle AIN \cong \triangle AIB$. Следователно $AN = AB$ и $AI \perp BN$. Аналогично $BI \perp AM$, което означава, че I е ортоцентър на $\triangle ABP$.

Тъй като $\sphericalangle APB = \sphericalangle API + \sphericalangle BPI = \frac{1}{2}(\beta+\alpha)$, то

$$PI = 2R_{ABP}\cos \sphericalangle APB = 2R_{ABP}\cos\frac{1}{2}(\beta+\alpha) = 2R_{ABP}\sin\frac{1}{2}\gamma.$$

От друга страна $R_{ABP} = R_{ABI} = 2R_{ABC}\sin\frac{1}{2}\gamma$. Следователно $PI = 4R_{ABC}\sin^2\frac{1}{2}\gamma = 2-\sqrt{2}$.

Критерии за оценяване: 3 т. за това, че I е ортоцентър на $\triangle ABP$; 3 т. за намиране на PI.

Задача 11.3 Да се намерят всички функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, за които са изпълнени свойствата:

(i) Съществува $a \in \mathbb{N}$, за което $f(a) = 1$.

(ii) За всеки три естествени числа a, b и c, за които $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ е изпълнено $\frac{1}{f(a)} + \frac{1}{f(b)} = \frac{1}{f(c)}$.

(С $\mathbb{N}$ се означава множеството на естествените числа $1, 2, 3, \ldots$)

Решение. Равенството $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ е изпълнено за всяко естествено число n. От (ii) следва, че $\frac{1}{f(n)} = \frac{1}{f(n+1)} + \frac{1}{f(n(n+1))} > \frac{1}{f(n+1)}$, откъдето получаваме $f(n+1) > f(n)$. Следователно функцията е растяща, като $f(1) = 1$ (ако $f(1) > 1$, то $f(a) = 1$ и $a > 1$, което е противоречие с това, че f е растяща).

От равенството $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$ следва, че $\frac{1}{f(n)} = \frac{1}{f(2n)} + \frac{1}{f(2n)}$, откъдето намираме $f(2n) = 2f(n)$. От това равенство и от $f(1) = 1$ по индукция следва, че $f(2^k) = 2^k$ за всяко k. Понеже функцията е растяща, като $f(2^{k-1}) = 2^{k-1}$ и $f(2^k) = 2^k$, то $f(n) = n$ за всяко $n \in [2^{k-1}, 2^k]$. Следователно има само една такава функция и тя е $f(n) = n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

$a = 1$ $f(2^n) = 2^n$.

Критерии за оценяване: 2 т. за това, че функцията е растяща; 1 т. за факта $f(1) = 1$; 2 т. за $f(2^k) = 2^k$; 2 т. за доказване, че $f(a) = a$ е единствената функция с исканите свойства.

Задача 11.4 Дадени са естествени числа $n > m \geq 2$ и квадрат $n \times n$, разделен на единични квадратчета. Да се намерят всички естествени числа t за които при всяко оцветяване на t на брой единични квадратчета, винаги можем да намерим квадрат със страна m, разположен по линиите на големия квадрат, който съдържа точно 1 оцветено квадратче.

Решение. Нека първо $n \pmod m \neq m-1$. Да допуснем, че $t < 2\left[\frac{n}{m}\right]$. Блок ще наричаме m последователни реда един до друг. Разделяме дъската на $\left[\frac{n}{m}\right]$ последователни блока. Щом $t < 2\left[\frac{n}{m}\right]$ ще има блок с не-повече от 1 оцветено. Ако е точно 1, лесно намираме търсения квадрат със страна m.

Ако е нула, започваме да движим блока докато достигнем до блок, в който всички оцветени са само в първия му ред (или последния). Сега разделяме този блок на $\left[\frac{n}{m}\right]$ последователни квадрата и отново намираме квадрат с най-много 1 оцветено. Ако то е точно 1, задачата е решена. Ако са нула, то движейки квадрата ще достигнем до квадрат с точно едно оцветено, защото оцветените квадратчета на блока лежат само в един ред.

Нека $t \geq 2\left[\frac{n}{m}\right] = k$. Записваме $t = l.k + r, 0 \leq r \leq k-1$. Разделяме стълбовете с номера от 2 до l на ивици $1 \times m$ и поставяме по 2 оцветени последните две квадратчета на всяка ивица. В първия стълб оцветяваме по произволен начин r квадратчета. Лесно се вижда, че не съществува квадрат със страна m и точно едно оцветено квадратче.

Ако $n \pmod m = m-1$, то сега $k = 2\left[\dfrac{n}{m}\right] + 1$ и в примера ще оцветим и последното квадратче на ивицата $1 \times (m+1)$ на споменатите по-горе стълбове (допуснали сме, че $t \geq 2\left[\frac{n}{m}\right] + 1$).

При $t \leq 2\left[\frac{n}{m}\right]$ намирането на квадрат със страна m и точно едно оцветено става с аналогични разсъждения на 1 случай, като разглеждаме поотделно случаите, когато последните $m-1$ реда съдържат оцветено квадратче, или не съдържат нито едно.

Отговор: $t < 2\left[\frac{n}{m}\right]$ при $n \pmod m \neq m-1$ и $t \leq 2\left[\frac{n}{m}\right]$ при $n \pmod m = m-1$.

Критерии за оценяване: 1 т. за верен отговор без доказателство; 3 т. за доказателство, че при дадено $t < 2\left[\frac{n}{m}\right]$ има квадрат с точно едно оцветено квадратче; 3 т. за конструкция, при $t \geq 2\left[\frac{n}{m}\right]$ при която няма такъв квадрат.

Задача 12.1. Нека x, y, z са такива реални числа, че

$$x^4 - 4xz + z^2 - 2z = 0, \quad y^4 - 4yz + z^2 - 2z = 0.$$

Да се намери най-голямата възможна стойност на $|x-y|$.

Решение. Имаме, че $t^4 - 4tz + z^2 - 2z = (t^2+z)^2 - 2z(t+1)^2$. Можем да считаме, че $x \neq y$. Тогава $z > 0$ и x, y са корени на квадратното уравнение (спрямо t) $2t^2 - 2ut + u^2 - 2u = 0$, където $u = \sqrt{2z}$. Оттук $|x-y| = \sqrt{4-(u-2)^2} \leq 2$, като $|x-y| = 2$ при $u = 2$.

Критерии за оценяване: По 2 т. за разлагането, за квадратното уравнение и за крайния извод.

Задача 12.2. Окръжност през върха C на $\triangle ABC$ се допира до страната AB в точка R и пресича страните AC и BC в точки P и Q така, че $AR.BR = CR^2$ и $AP.BQ = CP.CQ$. Да се докаже, че CR е височина или ъглополовяща в $\triangle ABC$.

Решение. Полагаме $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\varphi = \sphericalangle ACR$ и $\psi = \sphericalangle BCR$. Тогава $\varphi = \sphericalangle ARP$ и $\psi = \sphericalangle BRQ$. От синусовата теорема следва, че $\dfrac{AP}{RP} = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$ и $\dfrac{CP}{RP} = \dfrac{\sin(\alpha+2\varphi)}{\sin\varphi}$, откъдето $\dfrac{AP}{CP} = \dfrac{\sin^2\varphi}{\sin\alpha\sin(\alpha+2\varphi)}$. Аналогично $\dfrac{BQ}{CQ} = \dfrac{\sin^2\psi}{\sin\beta\sin(\beta+2\psi)}$. Тогава

$$AP.BQ = CP.CQ \Leftrightarrow \sin^2\varphi\sin^2\psi \triangleq \sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+2\varphi)\sin(\beta+2\psi).$$

По подобен начин следва, че $AR.BR = CR^2 \Leftrightarrow \sin\varphi\sin\psi \doteq \sin\alpha\sin\beta$. Значи $\sin\alpha\sin\beta = \sin(\alpha + 2\varphi)\sin(\beta+2\psi)$, т.е.

$$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-\beta+2\varphi-2\psi) - \cos(\alpha+\beta+2\varphi+2\psi).$$

Понеже $(\alpha+\beta) + (\alpha+\beta+2\varphi+2\psi) = 360^\circ$, то $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha-\beta+2\varphi-2\psi)$, т.е. $\sin(\alpha-\beta+\varphi-\psi)\sin(\varphi-\psi) \risingdotseq 0$. Следователно $\alpha+\varphi = \beta+\psi = 90^\circ$ или $\varphi = \psi$, т.е. CR е височина или ъглополовяща в $\triangle ABC$.

Критерии за оценяване: 1 т. за $\doteq$, 2 т. за $\triangleq$ и 3 т. за довършване.

Забележка. От $AR.BR = CR^2$ и $CR \perp AB$ следва, че $\sphericalangle ACB = 90^\circ$. Обратно, ако $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, то за окръжността с диаметър $CR \perp AB$ са изпълнени условията на задачата.

Задача 12.3. Върховете на два квадрата с лица S и T лежат върху страните на правоъгълен $\triangle ABC$, като три от тях лежат на хипотенузата AB с дължина цяло число c. Възможно ли е $S/2$ и $T/2$ да са взаимно прости естествени числа: а) за някое $c < 70$; б) за някое $c > 70$?

Решение. Възможно е и в двата случая.

Нека $a = |BC|$, $b = |AC|$ и $DEFG$ е квадрат със страна $m = \sqrt{S}$, като $D, E \in AB$, $F \in BC$, $G \in AC$. Понеже $\triangle AGD \sim \triangle GFC \sim \triangle ABC$, то $AG = mc/a$, $CG = mb/c$, откъдето $b = mc/a + mb/c$, т.е. (1) $m = \dfrac{abc}{ab + c^2}$.

Можем да считаме, че другият квадрат със страна $n = \sqrt{T}$ е $OMCN$, като $O \in AB$, $M \in BC$, $N \in AC$. От $\triangle AON \sim \triangle OBM \sim \triangle ABC$ следва, че $AO = nc/a$, $BO = nc/b$, откъдето $c = nc/a + nc/b$, т.е. (2) $n = \dfrac{ab}{a+b}$.

Тогава

$$\frac{1}{S} - \frac{1}{T} = \frac{(ab + c^2)^2 - (ac + bc)^2}{(abc)^2} = \frac{1}{c^2}.$$

Ако $S = 2s$ и $T = 2t$, то $c^2 \triangleq \dfrac{2st}{t-s}$. Понеже $(s, t) = 1$, лесно следва, че $t - s = 2$ или $t - s = 1$. В първия случай получаваме, че $c = 0$, което е невъзможно, а във втория достигаме до уравнението на Пел $(2s+1)^2 - 2c^2 \doteq 1$. Както е известно, това уравнение има безбройно много решения в естествени числа, като първите четири са $(1, 2)$, $(8, 12)$, $(49, 70)$ и $(288, 408)$.

Остава да видим за кои решения можем да построим $\triangle ABC$. От (1) и (2) следва, че

$$ab = \frac{mc^2}{c - m}, \quad a + b = \frac{mc^2}{(c-m)n}.$$

Тази система има решение в положителни числа, ако (3) $\dfrac{mc^2}{c-m} \geq 4n^2$. Понеже $n^2 = \dfrac{c^2m^2}{c^2 - m^2}$, лесно следва, че $a^2 + b^2 = c^2$. Освен това, $c > m$ и (3) добива вида $c \geq 3m$, т.е. $2s(s+1) = c^2 \geq 18s$ и значи $s \geq 8$.

Критерии за оценяване: По 1 т. за (1), (2), $\triangleq$, $\doteq$, $s \geq 8$, а) и б).

Задача 12.4. Виж зад. 11.4.

Задачите са предложени от: 8.1., 8.3. – Тодор Митев, 8.2. – Асен Божилов, Веселин Ненков, 8.4. – Емил Колев, 9.1, 9.3, 10.4 – Петър Бойваленков, 9.2 – Диана Данова, 9.4, 10.1 – Иван Ланджев, 10.2 – Емил Карлов, 10.3 – Станислав Димитров, 11.4(12.4) – Александър Иванов, 11.1, 11.2. – Емил Колев, 11.3 – Пламен Пенчев, Александър Иванов, Емил Колев, 12.1, 12.2, 12.3 – Николай Николов.